LIMITES, CONTINUITÉ, DÉRIVATION

Exercice 1 (*Calcul de limites*)**.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{x\sqrt{x}+3}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^5-1}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}+3x-7}{\operatorname{ch}x}$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2 (*Limites par la dérivée*)**.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x}{\cos x-1}}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3+x)-\ln 3}{\ln(2+x)-\ln 2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2\right)$

Exercice 3. Montrer que la fonction $x\mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4. Soit $f : x\mapsto \dfrac{\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor}{x}$. Déterminer, si elles existent, les limites de f en 0, en $\dfrac{1}{2}$ et en $+\infty$.

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique qui admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 6 ($\star$)**.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction croissante. On suppose que $f(x+1)-f(x)\to 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}\to 0$.

Indication : on pourra d'abord montrer que $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ *est décroissante.*

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? en 1 ?

Exercice 8. On pose $g : x\mapsto \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$. Déterminer l'ensemble de définition de g. En quel(s) point(s) peut-on prolonger par continuité la fonction g ?

Exercice 9. Montrer que la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$, notée $1_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout point $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 10. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\qquad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

On procèdera par analyse-synthèse, en déterminant f sur $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

Exercice 13. Soit P un polynôme réel de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 14. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe. *Indication : on pourra considérer l'application* $g : x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 15. Soit $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fonctions continues. On suppose que f est bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat est-il vrai si f est croissante ?

Exercice 17. Existe-t-il une application bijective et continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$? De $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$? De $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 18. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est <u>coercive</u> si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que si f est coercive et continue, alors elle atteint son minimum, c'est-à-dire :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \geq f(x_0)$$

Exercice 19 ($\star$)**.** Un cycliste parcourt une distance de 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel ce cycliste aura parcouru exactement 10 km. (La demi-heure doit commencer après son départ et se terminer avant son arrivée).

Exercice 20 (*Vrai ou faux, fonctions*)**.** Vrai ou faux ? Justifier.

1) Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.
2) Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive.
3) Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
4) La fonction partie entière est continue sur $[0,1[$.
5) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
6) Toute fonction continue est dérivable.
7) Si une fonction est dérivable, sa dérivée est continue.
8) Toute fonction convexe est dérivable et sa dérivée est croissante.

1) Si $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $f(x)$ tend vers une constante quand x tend vers $+\infty$.
2) Si $f(x)$ tend vers une constante quand x tend vers $+\infty$, alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 21. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition. Calculer la dérivée aux points où elle existe.

$$f : x \mapsto |x(x-4)| \qquad g : x \mapsto x^2 \lfloor x \rfloor \qquad h : x \mapsto \sin(x)\sqrt{|\sin x|}$$

Exercice 22. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Exercice 23 (Règle de l'Hôpital (sens facile))**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non singleton. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a). Montrer la règle de l'Hôpital :

$$\text{Si } f(a) = g(a) = 0 \text{ et } g'(a) \neq 0 \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Application : soient $r, s \in \mathbb{R}^*$ et $a > 0$. Calculer

$$\lim_{x\to a} \frac{x^r - a^r}{x^s - a^s}$$

Exercice 24 (TAF)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui s'annule en n points. Montrer que f' s'annule en au moins $n-1$ points.

Exercice 25 (TAF / IAF et constante d'Euler)**.** 1) Démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

2) En déduire le caractère borné de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

3) Montrer que la suite (S_n) converge (sa limite est appelée constante d'Euler).

Exercice 26 (IAF et majoration d'erreur)**.** Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{101} \approx 10 \qquad \cos 1 \approx \frac{1}{2} \qquad \sin \frac{1}{100} \approx \frac{1}{100}$$

Exercice 27 (IAF)**.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right]$

Exercice 28 (IAF complexe)**.** Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad |e^{ib} - e^{ia}| \leq |b-a|$.

Exercice 29 (Théorème de la limite de la dérivée)**.**

1) Démontrer que la fonction $x \mapsto \arccos\sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[0,1]$ puis étudier sa dérivabilité sur $[0,1]$.
2) Démontrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}\sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 30 (Dérivées n-ièmes)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x) = (x^2 - x)e^{2x} \qquad g(x) = \sin^3 x \qquad h(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Pour h, on pourra d'abord calculer les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

Exercice 31. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa classe, c'est-à-dire la plus grande valeur de $k \in \mathbb{N}$ qui fait que la fonction est de classe C^k.

$$f(x) = x|x| \qquad g(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 32. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est de classe C^∞.

Exercice 33. Soit f une fonction polynômiale. Montrer que l'équation $f(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions. *Indication : on pourra s'inspirer du résultat de l'exercice 24.*

Exercice 34. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Donner un contre-exemple si on omet l'hypothèse « g est croissante ».

Exercice 35 (Inégalités de convexité)**.**

1) Démontrer : $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \qquad \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$
2) Montrer que $x \mapsto -\ln x$ est convexe. En déduire :
$$\forall x_1, \ldots, x_n > 0 \qquad \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$
3) Montrer que $x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1, +\infty[$. En déduire :
$$\forall a, b > 1 \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$

Exercice 36. En utilisant un argument de convexité, montrer que

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Exercice 37. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f admet un minimum local en a, alors ce minimum est global. Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?

Exercice 38. Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.